1.就算哥德尔没有证明不完备性定理或是没有不完备性定理，日常使用的数学也有不一致的可能性（一个数学家Edward Nelson致力于证明比皮亚诺算术PA还要弱的原始递归算术PRA是不一致的）；

2.事实上日常使用的数学在很长一段时间里（甚至现在，物理中使用的数学）是不一致的（例如牛顿、莱布尼茨时期的微积分，贝克莱主教有著名的批判“无穷小的幽灵”，直到柯西、魏尔开特拉斯将微积分严格化；后来A. Robinson给出了有无穷小的实数模型，创立了非标准分析；Graham Priest曾经尝试用paraconsistent logic重构牛顿时期的微积分）；

3.实际上的数学很难说是一个形式系统（虽然现在大多数数学家都承认公理集合论ZFC是数学的基础，但是绝大部分数学家都说不出zfc的公理是什么。而早在有数理逻辑2000年之前按就有了数学；而且数学家们也从来不受单一的一个形式系统的束缚，例如格罗滕迪克引入他的超出了zfc的“Grothendieck Universe”）；

4.哥德尔定理的前提本身就是理论的一致性（第一定理证明的是：如果一个形式系统是一致的并且包含算术，那么存在一个语句它既不能被证明也不能被证否（第一不完备性定理的证明可以不依赖于自指）；哥德尔第二定理证明的是，如果一个形式系统是一致的并且包含算术，那么它不能证明自身的一致性）（第二不完备性定理比第一不完备性定理更强，因此实际上要求更多）；

5.而一致性证明本身也不能保证理论的一致性，只要想到不一致的理论本来就能够证明自身的一致性，而第二不完备性定理实际上告诉我们的是：如何一个包含算术的形式系统能证明它的一致性，它却是不一致的；

6.第二不完备性定理还告诉我们，像“[皮亚诺算术](https://www.zhihu.com/search?q=%E7%9A%AE%E4%BA%9A%E8%AF%BA%E7%AE%97%E6%9C%AF&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)+“皮亚诺算术不一致””（ ）或是  这样的理论是有模型/一致的（如果PA和ZFC本身是一致的话），这是因为表征可证性的谓词  只是半可表征的，也就是如果有系统T可证  （ ）就一定有  ，其中  为  的编码，可是  不一定就有  ，事实上第一不完备性定理证明的也就是这个。与之对比，令  为表征了x编码的证明序列证明了y编码的公式的谓词，那么x编码的证明序列确实证明了y编码的公式  当且仅当  。之所以Bew只是半可表征的是因为有非标准自然数，即在这个系统自身看来它可以证明自身的一致性，可是在“外面”的我们看来它并没有作出这个证明，因为编码这个“证明”的可能是一个非标准自然数。

6.Gentzen通过超穷归纳证明了皮亚诺算术PA的一致性，稍微具体一点来说是这样：

一般有了切割消去（cut-elimination，指系统中所有的证明都可以不需要用到cut rule，cut rule指如果有  和  就能够推导出  ）就会有子公式性质（subformula property），就是说推导出结论所用的前提都只是结论的子公式，这也意味着矛盾是不可推导的（因为形如  这样的公式没有任何子公式）；古德斯坦定理可以与“没有一个无穷下降的序数小于  （  为满足  的序数中最小的一个，也就是说  ）的原始递归序列”联系起来（因为证明了PA本身不能证明这条）

一个定理：如果有一个PA加上  -规则（即  可推导出“  ”；  可推导出“  ”，注意这是一个无限长度的证明）的一个height为  的带  次cut规则的推导；那么就有PA加上  -规则的一个height为  的只带有  次cut规则的推导。因而可以想见：就会有一个height为  的n次  次方的推导没有cut。因而可以通过对到  的归纳证明一致性

Turing证明了Turing's Completeness Theorem. If ϕ is a true Π1 sentence in the language（哥德尔用来表达一致性的语句就等价于一个\Pi\_1语句） of arithmetic, then there is an ordinal notation a such that |a|=ω+1 and Ta proves ϕ.

Feferman等批评过Godel对一致性语句的formulation并提出了一些其它的formulation，其中一些病态的“一致性语句”可以被证明，区分什么是“自然的”一致性语句也成为了一个话题。

在比皮亚诺算术弱的鲁滨逊算术Q中，哥德尔一致性语句Con\_Q并不表达Q的一致性（因为Q太弱），但是在PA中，Con\_Q可以被看成表达了Q的一致性。

一个小练习：说明第二不完备性定理并不意味着一个系统的一致性只能在比它更强的系统中才能证明（考虑  ）。

7.数学家们随时可以修改系统，就如历史实践上，所谓的“数学危机”实际上并没有对数学造成任何影响，1895-1930年这段时间数学分支活跃层出不穷：勒贝格积分、积分方程和谱理论、类域论、“意大利”[代数几何学](https://www.zhihu.com/search?q=%E4%BB%A3%E6%95%B0%E5%87%A0%E4%BD%95%E5%AD%A6&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)、代数拓扑学（庞加莱、[布劳威尔](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%B8%83%E5%8A%B3%E5%A8%81%E5%B0%94&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)、Lefschetz、*H*. Hopf）、群的线性表示（Frobenius、Burnside、I.Schur）、紧李群及其表示的结构（E.嘉当、H.外尔）、哈代-李特伍德的“圆法”、[丢番图](https://www.zhihu.com/search?q=%E4%B8%A2%E7%95%AA%E5%9B%BE&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)逼近与丢番图方程（A.图埃、[西格尔](https://www.zhihu.com/search?q=%E8%A5%BF%E6%A0%BC%E5%B0%94&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)、A.韦伊）。1940年以来的数学的进展要比从[泰勒斯](https://www.zhihu.com/search?q=%E6%B3%B0%E5%8B%92%E6%96%AF&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)到1940年的全部成就还大。这也可能可以部分说明了为何这么容易就可以让矛盾消失（加几条限制）的原因[[1]](https://www.zhihu.com/people/sliverwhite-47/answers?page=3#ref_1)；

8.有不一致而不“琐屑”（Trivial）（也就是说虽然它们是不一致的（可以同时证明  ），但并不会将一切都证明出来（而在通常的经典逻辑中，有爆炸律（explosion）：矛盾可以推出一切（对所有  ， ）））的演算/系统（虽然要牺牲或改变一部分结论），在这个意义上说，矛盾也不至于让系统全然丧失一切价值，甚至矛盾也是有价值的。例如，哲学上的dialecticism；人工智能当数据中有错误数据或新的数据与原有的数据发生冲突时，我们不想让它产生爆炸式的结果（我们每个人本身的信念系统也几乎是一定有矛盾的）；在paraconsistent mathematics里，我们可以有一致又完备又包含算术的系统。

「一个寓言恰如其分地概括了本世纪有关数学基础的进展状况。 在莱茵河畔， 一座美丽的城堡已经矗立了许多个世纪。 在城堡的地下室中生活着一群蜘蛛， 突然一阵大风吹散了它们辛辛苦苦编织的一张繁复的蛛网，于是它们慌乱地加以修补，因为它们认为，正是蛛网支撑着整个城堡。」

哥德尔证明了数学是不可穷尽的：无论你有多么聪明，你也不可能穷尽数学。我认为哥德尔证明的不是别的，他证明的正是数学就是自由的冒险，自由的心性的冒险。

哥德尔证明了没有一个单一的形式系统可以判定所有的数学命题，可是这并不意味着有“原则上”不可证的数学命题（想想  和  的区别），当[希尔伯特](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%B8%8C%E5%B0%94%E4%BC%AF%E7%89%B9&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A2277617289%7D)说出“我们必须知道，我们终将知道”（Wir müssen wissen, wir werden wissen.）时，它激励了我们，并且仍将激励我们。

**参考**

1. [**^**](https://www.zhihu.com/people/sliverwhite-47/answers?page=3#ref_1_0)狄奥多涅，数学的建筑，胡作玄 译，大连理工大学出版社，2009

*Wir müssen wissen,wir werden wissen*

*The essence of mathematics lies in its freedom.*

*in mathematics, you don't understand things, you just get used to them.*